球面調和関数展開の直角回転

あるいは

Problem of Pen-Apple-Pen

福島登志夫（国立天文台）

J Geodesy, 2017, accepted

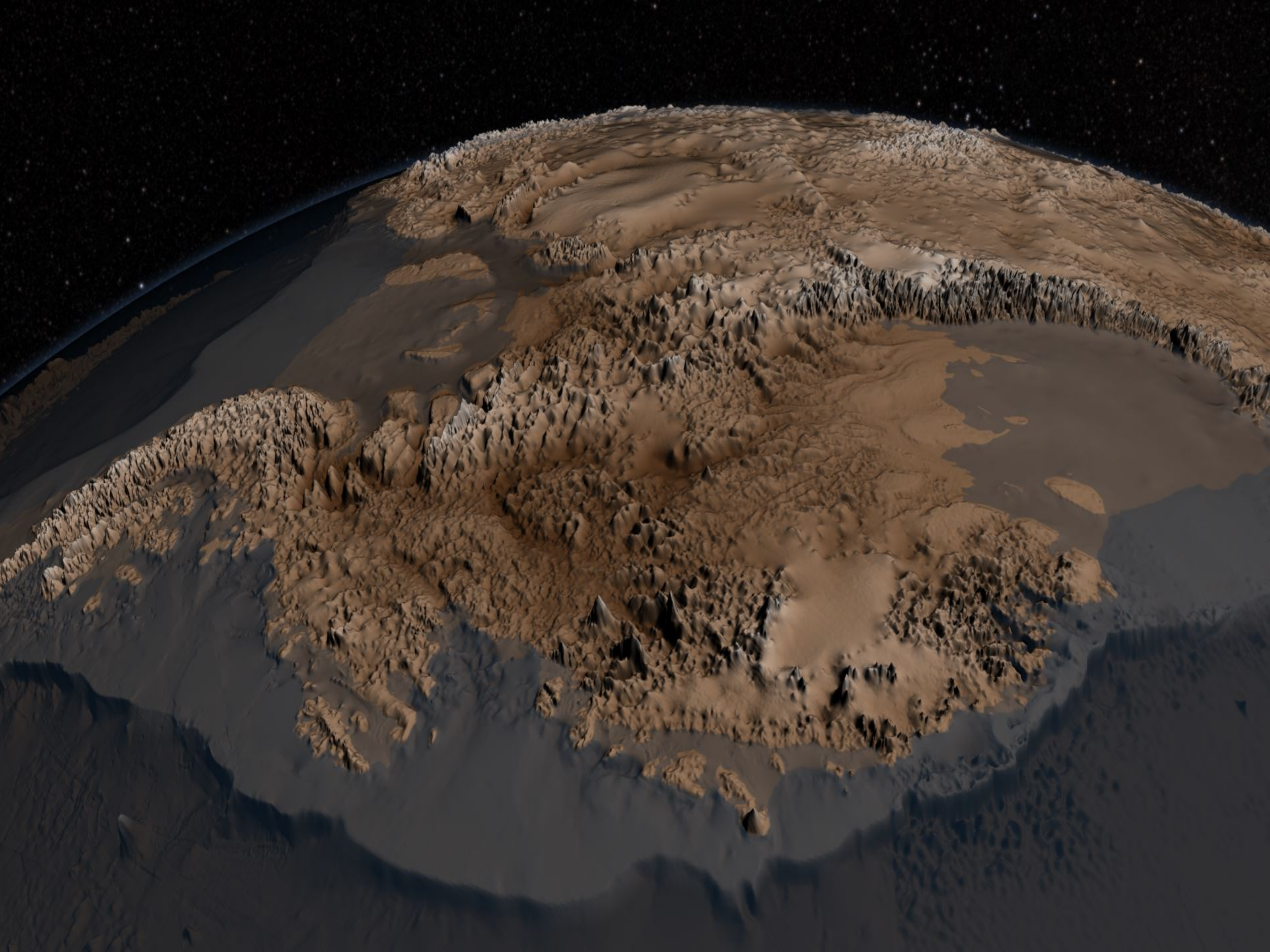
DOI: 10.1007/s00190-017-1004-3

ResearchGate Fukushima 検索


PPAP

高精度球面調和関数展開を目指して

- 超高次球面調和関数展開の必要性
  - 地形、重力、磁場、…
  - 地球重力場: 2,160 x 2,190 (EGM2008)
  - 次世代地球重力場: 10,800 x 10,800?
- 極域データの蓄積
  - 英国/BEDMAP2, NASA/IceBridge, …



基本の
「き」

ルジャンドル対フーリエ

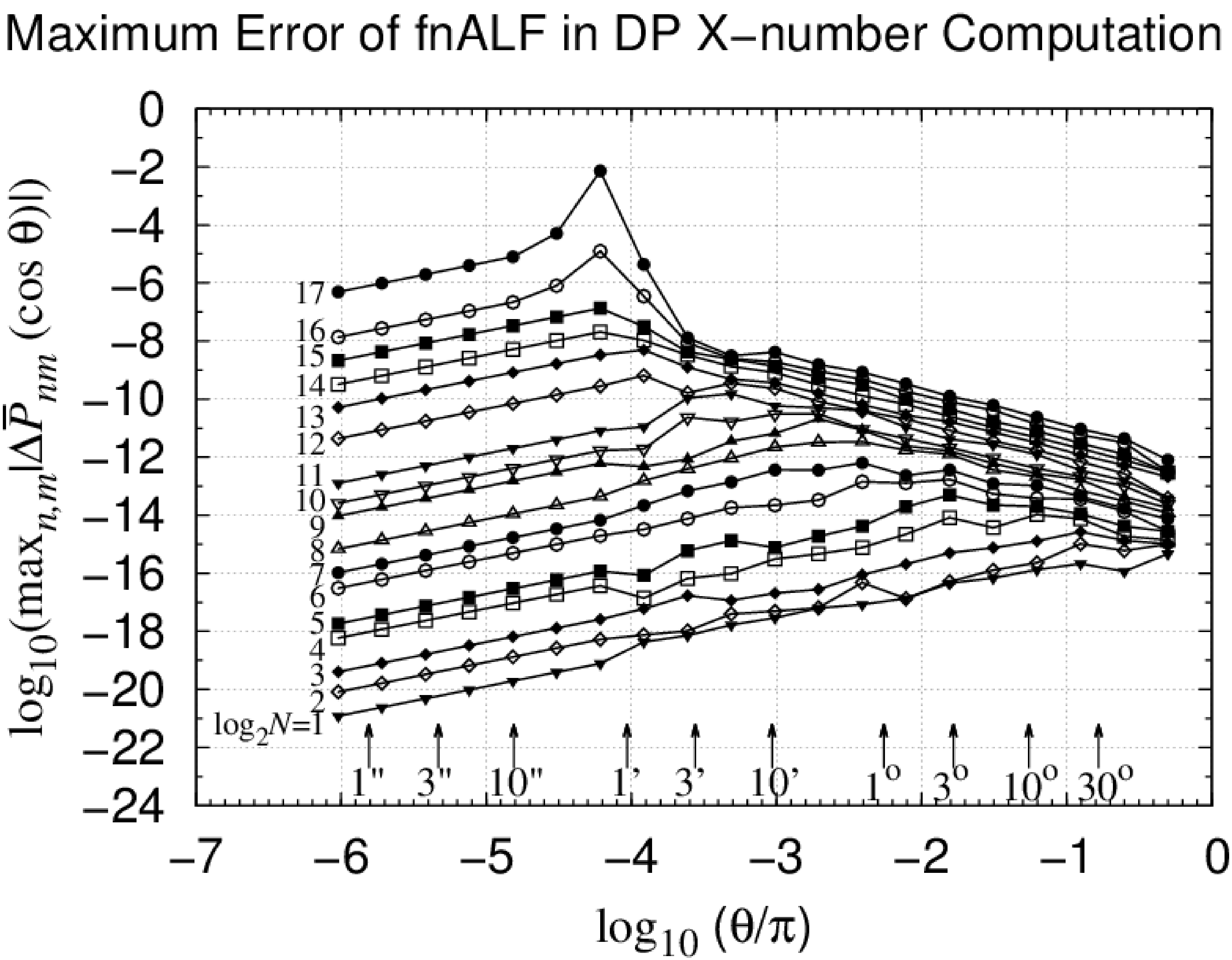
球面調和関数とは

- ラプラス方程式　$\Delta V = 0$
  - 重力ポテンシャル、磁気ポテンシャル、…
- 球面座標系での変数分離解法

$$V = \frac{GM}{a}\left[1 + \sum_{2 \le m \le n} \left(\frac{a}{r}\right)^n P_{nm}(\cos\theta)\left(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda\right)\right]$$

  - ルジャンドル陪関数　$P_{nm}(\cos\theta)$
  - フーリエ級数展開　$\cos m\lambda, \sin m\lambda$

次数の
呪い


Maximum Error of fnALF in DP X−number Computation
log10(maxn,m|ΔP̄nm (cos θ)|)
log10 (θ/π)
0
−2
−4
−6
−8
−10
−12
−14
−16
−18
−20
−22
−24
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
log2N=1
1"
3"
10"
1'
3'
10'
1o
3o
10o
30o

極座標系の特異点問題

- 数学的特異点 $\theta = 0$
  - 不可避、極域では深刻な影響
- 一つの解決法:座標系の直角回転

$$\left(r,\theta,\lambda\right)\to\left(r,\chi,\psi\right)$$

- 回転後の表現 ← ウィグナーd関数

$$V=\frac{GM}{a}\left[1+\sum_{2\le k\le n}\left(\frac{a}{r}\right)^{n}P_{nk}\left(\cos\chi\right)\left(C'_{nk}\cos k\psi+S'_{nk}\sin k\psi\right)\right]$$

ウィグナー

- E. Wigner (1902-1995)
- ノーベル物理学賞 (1963)
  - 群論と量子力学 (1931)
- マンハッタン計画に関与
- ウィグナーD行列
- ウィグナーd関数
- その他多数の予想・定理

新しい
手法

展開係数の変換

- 一般公式 (Aubert 2013)
- 特殊化: y軸周りの直角回転

$$C'_{nk} = \sum_{m=0}^{n} J_{nkm} E_{nkm} C_{nm}$$

$$S'_{nk} = \sum_{m=1}^{n} K_{nkm} E_{nkm} S_{nm}$$

$$J_{nkm} = \frac{(-1)^{k+m} + (-1)^{n}}{\sqrt{(1+\delta_{k0})(1+\delta_{m0})}}$$

$$K_{nkm} = (-1)^{k+m} - (-1)^{n}$$

- E_{nkm} d関数の特別値

E_{nkm}の漸化式計算：一般項

- 次数nに関する前進漸化式

$$E_{nkm} = -a_{nkm} E_{n-1,km} - b_{nkm} E_{n-2,km}$$

$$a_{nkm} = \frac{km(2n-1)}{(n-1)\sqrt{(n^2-k^2)(n^2-m^2)}}$$

$$b_{nkm} = \frac{n}{n-1}\sqrt{\frac{\left[(n-1)^2-k^2\right]\left[(n-1)^2-m^2\right]}{(n^2-k^2)(n^2-m^2)}}$$

E_{nkm}の漸化式計算：出発値

- ２つの出発値公式

$$E_{kkm} = G_{km}$$

$$E_{k+1,km} = -a_{km} E_{kkm}$$

$$a_{km} \equiv a_{k-1,km} = m\sqrt{\frac{2k+1}{(k+1)^2 - m^2}}$$

対角値G_{km}の漸化式計算

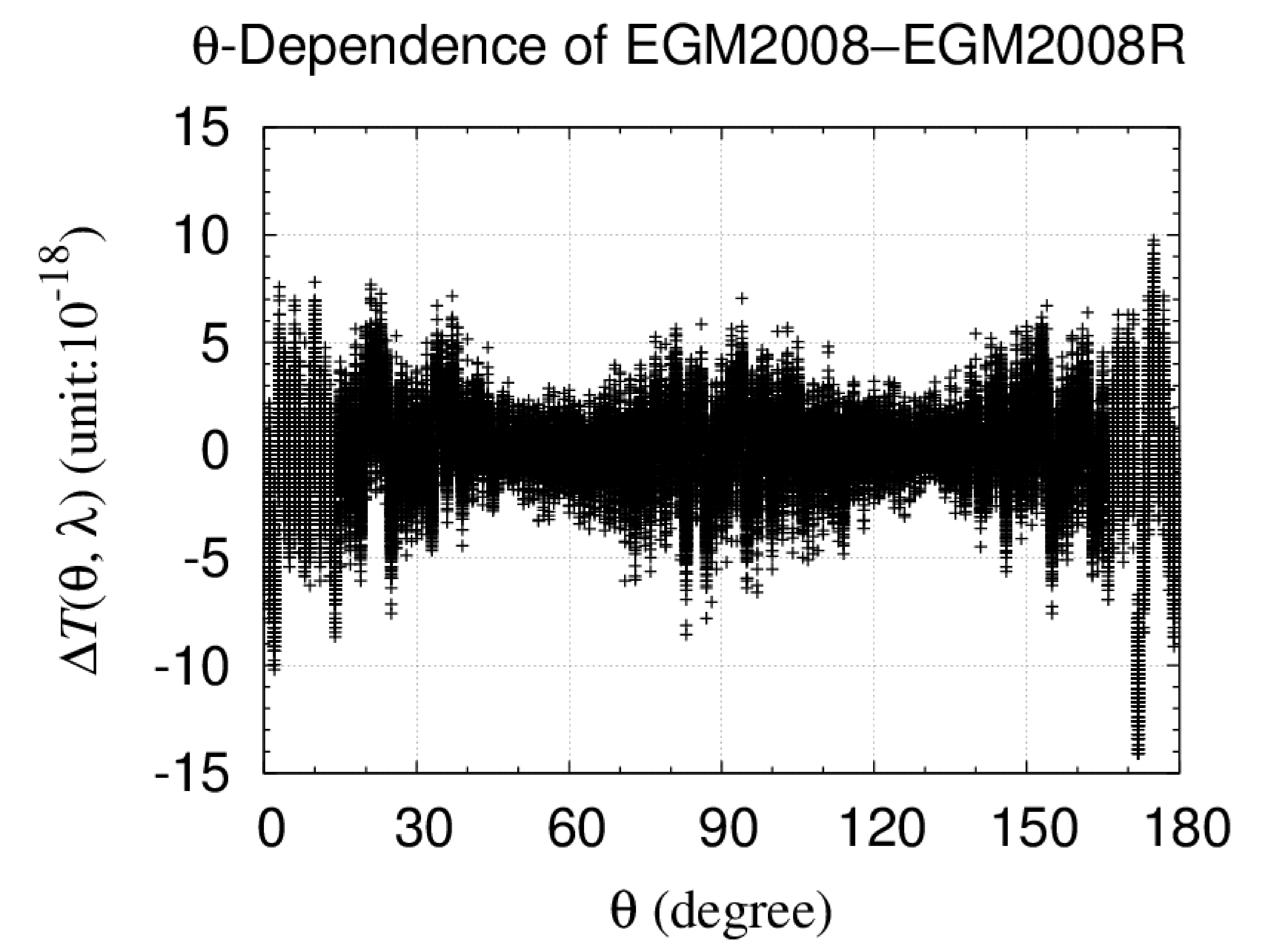
- 波数kに関する前進漸化式

$$G_{00} = 1$$

$$G_{mm} = 2^{-1} G_{m-1,m-1}$$

$$G_{km} = \sqrt{\frac{k(2k-1)}{2(k^2-m^2)}} G_{k-1,m}$$

変換前と
変換後


θ-Dependence of EGM2008–EGM2008R
15
10
5
0
-5
-10
-15
ΔT(θ, λ) (unit:10^-18)
0
30
60
90
120
150
180
θ (degree)

結論

- 球面調和関数を直角回転させる新手法
- ウィグナーd関数の特別値を活用
- 任意次数の展開に適用可
- 計算例:EGM2008R＝EGM2008の直角回転
- 極域・高緯度域の球面データ解析に有用

これは
始まりに
過ぎない

フーリエの逆襲

球面上の
Fast
Fourier
Transform